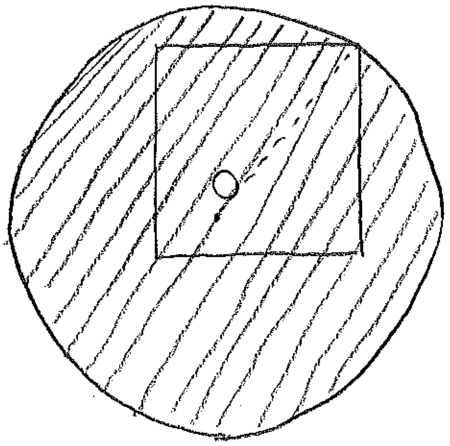
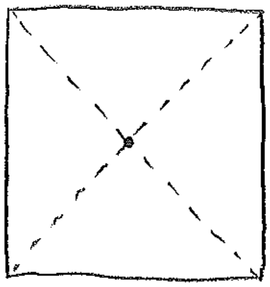
2017年 栄光 解答

1

(1)

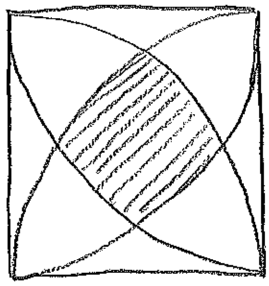


(2)



157cm²

(3)



2

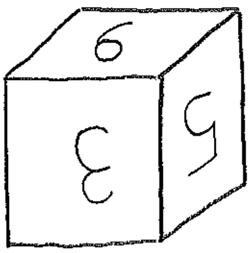
(1) 最も大きい数 108
最も小さい数 4

(2) 最も大きい数 121
最も小さい数 14

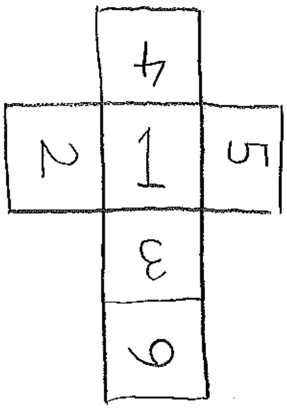
(3) 2, 5, 8, 9

3

(1)



(2)



4

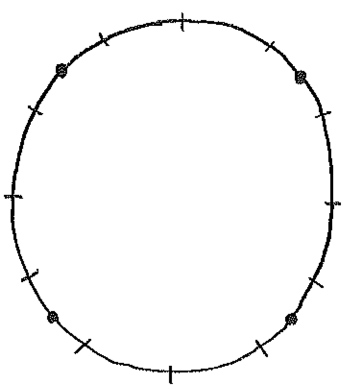
(1) 22.5cm (2) 2段目の横の、角から10cmの位置

5

(1) 12 (2) 46 (3) 24種類

(4)

A



花まるラボ

□1

(1) ピンをさしてその点を中心に紙を1回転させるとき、中心から最も遠い点が一番大きく動くので、紙の通過する範囲は、ピンから最も遠い点までの距離を半径とし、ピンを中心とする円になる。ここでは、ピンは点〇、点〇から最も遠いのは右上の角なので、点〇と右上の角の距離を半径として、点〇を中心に円をかけばよい。

(2) 紙が通過する範囲は円なので、その面積が最も小さくなるのは、円の半径が最も短くなるときである。したがって、このときのピンの位置は、正方形の2本の対角線の交点となる。

(3) 紙が通過する面積は、(半径)×(半径)×3.14で求められる。これが314cm²以下となるのは、半径が10cm以下のとき。つまり、ピンから最も遠い点までの距離が10cm以下のとき。ピンから最も遠い点は、正方形の頂点のうちどれかになるので、ピンをさすことができる範囲は、どの頂点からの距離も10cm以下になる範囲となる。

□2

(1) 1〜9の数字2つをかけてできる最大の数は $9\times9=81$、最小の数は $1\times1=1$。ここに1〜9の数字3つを足すことになるが、足す数で最大なのは $9+9+9=27$、最小なのは $1+1+1=3$。したがって、+を3個、×を1個使うと、
最も大きい数：$9\times9+9+9+9=108$、最も小さい数：$1\times1+1+1+1=4$　となる。

(2) 1〜5の数のうち、1以外の数は、1以外の数に対して足すよりかける方が数が大きくなる。逆に、1はかけるより足す方が大きくなる。これをふまえると、
最も大きい数：$5\times4\times3\times2+1=121$、最も小さい数：$5+4+3+2\times1=14$　となる。

(3) $\boxed{1}\underset{A}{\overset{+}{\times}}\boxed{2}\underset{B}{\overset{+}{\times}}\boxed{?}\underset{C}{\overset{+}{\times}}\boxed{9}\underset{D}{\overset{+}{\times}}\boxed{9}=\boxed{29}$　左の図のように、+か×を入れる部分を左からA, B, C, Dとする。

Dが×だとすると、$9\times9=81$で、これは29より大きくなってしまうので、Dは+になる。すると、$\boxed{1}\underset{A}{\overset{+}{\times}}\boxed{2}\underset{B}{\overset{+}{\times}}\boxed{?}\underset{C}{\overset{+}{\times}}\boxed{9}=\boxed{20}$ だとわかる。A, B, Cのパターンは右下の表のようになる。それぞれのパターンを調べてみると、$\boxed{?}$に入る数字がわかるので、考えられる数字は2, 5, 8, 9の4つ。

A	B	C	?	A	B	C	?
+	+	+	8	×	+	+	9
+	+	×		×	+	×	2
+	×	+	5	×	×	+	
+	×	×		×	×	×	

(別) Cが×と+で場合分けすると、すぐ求められる

$\boxed{3}$

(1)

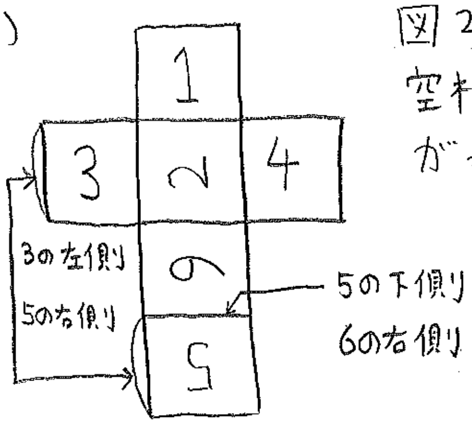
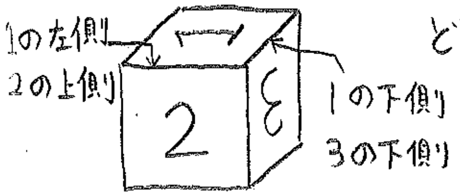


図2では、5の右側と下側にくっついている面が空欄になっている。5の右側と下側がどの辺でつながっているかを展開図で考えると、左の図のようになる。

つながっている辺が3と6にとってどっち側なのか考えると答えが分かる。

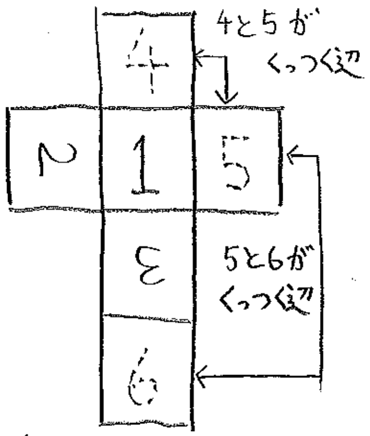
(2)



図A

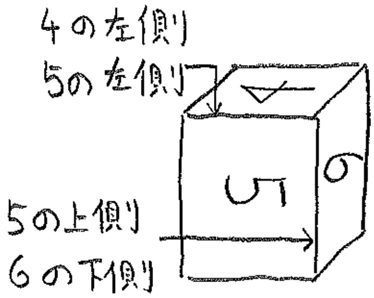
(1)と同じように、つながっている辺がどの数字にとってどっち側にあるかを考える。図Aから、展開図の2と3が決まり、さらに、向かい合う面の数字の和は7なので、4，5，6の位置も決まる(図B)。

図Cのように、4と5，5と6の関係も考えると、4,5,6の展開図での向きも決まる。



点線は向きが決まってない数字

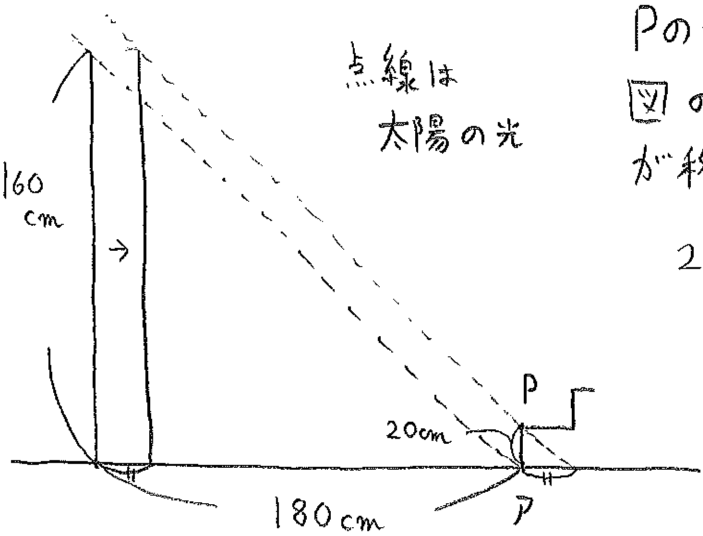
図B



図C

$\boxed{4}$

(1)



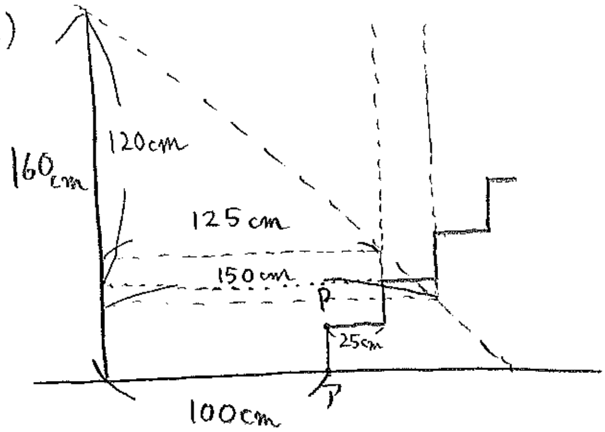
Aさんが右に移動したとき、影の頭の先がPの位置にきたので、その様子は右の図のようになる。相似を利用すると、Aさんが移動した距離は

$$20\text{cm} \times \frac{180}{160} = 22.5\text{cm}$$

と分かる。

4

(2)



Aさんは最初の位置から80cm移動したので、アまでの距離は180－80＝100cm。(1)のときより長く移動したので、影の先は点Pより先の位置にある。

Aさんから125cmの位置に壁があったとすると、壁にうつる影の高さは

$160-125\times\frac{160}{180}=48\frac{8}{9}$ cm。これは、2段目の角の高さ $20\times2=40$cmより高いので、影は2段目の角より向こう。

Aさんから150cmの位置についても同じように考えると、影の高さは

$160-150\times\frac{8}{9}=26\frac{2}{3}$ cm。これは、2段目の高さ40cmより低いので、影は3段目の縦より手前。したがって、影の先は2段目の横にある。

影の先は、Aさんの位置より $(160-20\times2)\times\frac{180}{160}=135$ cm 先にある。

よって、影の先は2段目の横の、角から $135-(100+25)=10$ cm の位置にある。

5

円上の点の位置を、点Aから時計回りに1周するときに、点Aからの道のりと1周の長さの比の値で表してみる。たとえば、点Bの位置は $\frac{3}{4}$。ただし、Aの位置は1で表すこととする。

すると、正三角形の点の位置は $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}$ で、正方形の点の位置は $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$ というように、正多角形の頂点の数を分母とした1以下の分数で頂点の位置が表される。

分数が約分できるとき、約分すると分母が小さくなるので、その分数の位置にある点は、既約分数で表したときの分母を頂点の数とする正多角形をかいたときにかかれた点である。したがって、点の位置を表す分数のうち、既約分数だけを数えればかぶりはない。

(1) 分母が3で1以下の既約分数は2つ、4のときは2つ、5のときは4つ、6のときは2つ。これらの分数で表される点のほかに、$\frac{1}{2}$の点と1の点の2つがあるので、円周上の点の数は $2+2+4+2+2=12$。

(2) (1)の点に加え、分母が7, 8, 9, 10, 11, 12の既約分数で表される点が加わる。点の数はそれぞれ6、4、6、4、10、4なので、円周上の点の数は

$12+6+4+6+4+10+4=46$。

5

(3) 点Bは$\frac{3}{4}$と表される。$\frac{3}{4}$と等しい値の分数で表される点をもった正多角形が、点Bを頂点にもつ。正九十九角形までかいた時、分母は最大で99なので、$\frac{3}{4}$と等しい値の分数は$\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \cdots, \frac{72}{96}$。その個数は$96 \div 4 = 24$個なので、これらの点をもつ、すなわち点Bを頂点にもつ正多角形は24種類ある。

(4) $99 \div 7 = 14 \cdots 1$, $99 \div 8 = 12 \cdots 3$, $99 \div 9 = 11$。ここから、分母が7, 8, 9の既約分数を頂点にもつ正多角形はそれぞれ14, 12, 11種類なので、ちょうど12種類の正多角形の頂点になる点が分母8の既約分数で表されることがわかる。分母8の既約分数は$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$の4つなので、これにより表される点をかけばよい。

5 (別解)

(1) A以外の点の重複を考えないことにすると、まずはじめに点Aが1つ、次に正三角形により点が2つ増え、正方形により点が3つ増える。同じように点が増えていくので、点の数は$1+2+3+4+5=15$。このうち、正三角形による2つの点は1回、正方形による点のうち1つは1回、重複しているので、$15-2\times1-1\times1=12$より、点の数は12。

(2) 正十二角形までかくと、(1)と同じように考えると、重複を数えなければ点の数は$1+2+3+\cdots+11=66$。このうち、正三角形による2つの点は3回、正方形による点Aの向かいの点は4回、それ以外の点(Bとその向かいの点)は2回、正五角形による4つの点は1回、正六角形による点のうちAの両隣の点は1回、それぞれ重複している。よって点の数は、$66-2\times3-1\times4-2\times2-4\times1-2\times1=46$。

(3) 点Bは、頂点数が4の倍数の正多角形に使われるので、$99 \div 4 = 24 \cdots 3$より、24種類。

(4) $99 \div 7 = 14 \cdots 1$, $99 \div 8 = 12 \cdots 3$, $99 \div 9 = 11$なので、ちょうど12種類の正多角形の頂点になっている点は、頂点の数が8の倍数の正多角形すべての頂点になっている点、すなわち正八角形の頂点である。このうち、頂点の数が8の倍数でない正多角形にも使われている頂点を考えると、それは正方形の頂点なので、正八角形の頂点から正方形の頂点を除いた点をかけばよい。